УДК 550.338

А. А. Лебедкина, И. В. Карпов, С. Б. Лебле

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПРОЕКЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ВОЛН ПУАНКАРЕ И РОССБИ В АТМОСФЕРЕ

Традиционно в экспериментальных исследованиях волновой структуры атмосферы определяют частоту волн. Эти данные, как правило, недостаточны для установления типа волновых возмущений, так как не определен пространственный масштаб волн. Проблемы могут быть разрешены с помощью применения метода операторов проектирования, который позволяет идентифицировать вклад известных типов волн в наблюдаемом волновом поле. В работе представлена процедура построения проекционных операторов для планетарных волн Пуанкаре и Россби в сферической атмосфере в приближении «мелкой воды». Предложенная процедура позволяет получить обобщенный вид оператора проектирования без использования приближения β-плоскости.

Traditionally, in experimental studies of the wave structure of the atmosphere determine the frequency of the waves. These data are generally insufficient to identify the type of wave disturbances as well as the spatial scale is not defined waves. Problems can be solved by applying the method of projection operators, which allows us to identify the contribution of certain types of waves in the observed wave field. This work presents a procedure for constructing the projection operators for the Poincare and Rossby planetary waves in the spherical atmosphere in the approximation of "shallow water". The proposed procedure allows to obtain the generalized form of the projection operator approach without the use of β-plane.

Ключевые слова: планетарные волны, проекционные операторы, уравнения динамики атмосферы.

Key words: planetary waves, projection operators, atmosphere dynamics equations.

Исследование волновой структуры вариаций атмосферных параметров обусловлено необходимостью решения ряда практических задач, связанных с прогнозом состояния среды, и предполагает знание спектральных характеристик атмосферных волн. Современные методы идентификации волновых возмущений в атмосфере основываются на методах гармонического анализа результатов наблюдений. Успешность их применения определяется наличием наборов экспериментальных данных, полученных при длительных (по сравнению с периодом волны) наблюдениях атмосферы на большом количестве независимых станций. Сложившаяся к настоящему времени система наблюдений в атмосфере, как наземная, так и спутниковая, крайне неравномерно покрывает поверхность Земли и, несмотря на продолжительность исследований, не позволяет решить задачу идентификации волн. Это связано с принципиальными трудностями, и решение данной задачи предполагает развитие новых методов анализа наблюдений.

В статье предлагается процедура построения проекционных операторов для крупномасштабных волн в атмосфере. Достоинством этого метода является возможность идентификации типа волны и ее характеристик только из временного ряда наблюдений. Это означает, что задача идентификации волн может быть решена на основе наблюдений только одной станции.

В методе проекционных операторов предполагается, что наблюдаемая пространственно-временная структура атмосферы определяется суперпозицией волн различных типов. Для каждого типа волн, участвующих в такой суперпозиции, предполагаются известными дисперсионные и поляризационные соотношения (связь между компонентами вектора волнового поля). На основе таких предположений можно построить операторы проектирования исходного суперпозиционного состояния Ф на линейный базис, соответствующий известному типу атмосферных волн:

$$\Phi = \sum_{1}^{n} \Phi_i = \sum_{1}^{n} P_i \cdot \Phi \,. \tag{1}$$

Здесь P_i и Φ_i — операторы проектирования и волновой вектор, соответствующий i-му типу волны. Вектор Φ_i содержит компоненты волнового поля, например меридиональную и зональную проекцию вектора скорости, давление и т.д. Связь между компонентами вектора Φ_i для каждого типа волны определяется своими поляризационными соотношениями. Действие оператора проектирования на суперпозиционное состояние Ф, которое, по сути, является результатом наблюдений, определяет амплитуды и фазы Φ_i волн известного типа. В статье рассматривается процедура построения проекционного оператора для планетарных волн Россби и Пуанкаре в атмосфере Земли.

Характерные масштабы планетарных волновых возмущений позволяют существенно упростить систему гидродинамических уравнений для описания динамики атмосферы. Для таких волн вполне оправданно используется приближение «мелкой воды», в котором предполагается, что горизонтальные масштабы движения сопоставимы с радиусом Земли, а вертикальный масштаб мал [1; 2].

В этом приближении система безразмерных уравнений динамики атмосферы в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} - \frac{2\Omega\tau\beta}{\alpha}\cos\theta v' + \frac{\kappa}{\alpha^2 r'}\frac{\partial p'}{\partial \theta'} = 0,$$
$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + \frac{2\Omega\tau\beta}{\alpha}\cos\theta u' + \frac{\kappa}{\alpha^2 r'\sin\theta}\frac{\partial p'}{\partial \varphi'} = 0, \tag{2}$$
$$\frac{\partial p'}{\partial t'} - \frac{\gamma\alpha}{r'}ctg\theta u' + \frac{\gamma}{r'}\frac{\partial u'}{\partial \theta'} + \frac{\gamma}{r'\sin\theta}\frac{\partial v'}{\partial \varphi'} = 0,$$

где

$$t' = \frac{t}{\tau},\ r' = \frac{r}{R},\ p' = \frac{p}{p_0},\ \theta' = \frac{\theta}{\alpha},\ \varphi' = \frac{\varphi}{\beta},\ u' = r'\frac{\partial\theta'}{\partial t'}, \tag{3}$$
$$v' = r'\sin\theta\frac{\partial\varphi'}{\partial t'},\ \alpha = \pi,\ \beta = 2\pi,\ \gamma = \frac{c_p}{c_v},\ \kappa = \frac{\tau^2 p_0}{R^2\rho_0},$$

p_0 — начальное значение давления, p — давление, ρ_0 — плотность атмосферы, τ — период того или иного типа волн, Ω — угловая скорость вращения Земли, u' — меридиональная скорость, v' — зональная скорость. В (2) $t', r', \theta', \varphi'$ - безразмерные время и сферические координаты. Связь размерных и безразмерных величин определяется выражениями (3).

Рассматривая решения в виде планетарных волн, распространяющихся в сферической атмосфере в канале шириной D (т. е. решения в виде $f = f_0 e^{i(m\theta + n\varphi)}, m = 0, 1, 2..., n = 0, 1, 2...$), можно получить дисперсионное соотношение, которое в низкочастотном пределе определяет волну Россби ($\sigma_1{}^2 / f^2 < 1$), а в высокочастотном — волны Пуанкаре ($\sigma_{2,3} / f > 1$), а также поляризационные соотношения.

Обращаясь к сферической атмосфере и полагая, что атмосферные вариации с рассматриваемыми пространственными масштабами формируются суперпозицией волн Россби и Пуанкаре, можем записать систему (1) в виде эволюционного уравнения

$$L\xi = \dot{\xi}, \tag{4}$$

где $\xi = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix}$,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\Omega\tau\beta}{\alpha}\cos\theta & -\frac{\kappa}{\alpha^2 r'}\frac{\partial}{\partial\theta'} \\ -\frac{2\Omega\tau\beta}{\alpha}\cos\theta & 0 & -\frac{\kappa}{\alpha^2 r'\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi'} \\ \frac{\gamma\alpha}{r'}ctg\theta - \frac{\gamma}{r'}\frac{\partial}{\partial\theta'} & -\frac{\gamma}{r'\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi'} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для построения проекционного оператора, удовлетворяющего условиям (1), применяем Фурье-преобразование к уравнению (3), полагая, для простоты, что $\theta = const$. Результат такого преобразования $\hat{L}\hat{\xi} = \dot{\hat{\xi}}$ будет иметь следующий вид:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\Omega\tau\beta}{\alpha}\cos\theta & -\frac{\kappa}{\alpha^2 r'}ik \\ -\frac{2\Omega\tau\beta}{\alpha}\cos\theta & 0 & -\frac{\kappa}{\alpha^2 r'\sin\theta}i\lambda \\ \frac{\gamma\alpha}{r'}ctg\theta - \frac{\gamma}{r'}ik & -\frac{\gamma}{r'\sin\theta}i\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Решая задачу на собственные значения, которые, по сути, являются дисперсионными соотношениями для рассматриваемых волн, и собственные вектора для оператора $\hat{L}$, определим их явный вид:

$$\sigma_{1,2} = \pm i\sqrt{\kappa\gamma\left(\frac{\alpha^2\lambda^2}{\beta^2\sin^2\theta} + \frac{k^2}{\alpha^2}\right) + 4\Omega^2\tau^2\cos^2\theta - i\frac{\kappa\gamma k\lambda}{\alpha^2}ctg\theta}$$

— для волн Пуанкаре,

$$\sigma_3 = \frac{i\lambda\frac{\kappa\gamma}{\beta}2\Omega\tau ctg^2\theta}{\kappa\gamma\left(\frac{\alpha^2\lambda^2}{\beta^2\sin^2\theta} + \frac{k^2}{\alpha^2}\right) + 4\Omega^2\tau^2\cos^2\theta - i\frac{\kappa\gamma k\lambda}{\alpha^2}ctg\theta}$$

— для волны Россби,

$$\Phi_i = c\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_i}\left(\frac{2\Omega\tau\beta}{\alpha}x_i\cos\theta - ik\frac{\kappa}{\alpha^2}\right) \\ x_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_i \\ b_i \end{pmatrix}\cdot\tilde{\mu}_i \qquad (5)$$

— собственные вектора.

Здесь $x_i = \dfrac{\frac{2\Omega\tau\beta}{\alpha}\sigma_i\cos\theta - i\lambda\frac{\kappa\gamma}{\beta^2}\frac{\alpha ctg\theta + ik}{\sin\theta}}{\sigma_i\gamma(\alpha ctg\theta + ik) - \frac{2\Omega\tau\alpha}{\beta}i\lambda\gamma ctg\theta}$, причем индекс $i = 1, 2$ для волн Пуанкаре и $i = 3$ для волны Россби.

Для баротропных волн Россби и Пуанкаре в атмосфере общий вид проекционных операторов получен в работе [2], а процедура его вывода в приближении β-плоскости представлена в исследовании [3]. Согласно работе [2], оператор проектирования будет иметь следующий вид:

$$P_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha_i \cdot a_i(\sigma) & \beta_i \cdot a_i(\sigma) & \gamma_i \cdot a_i(\sigma) \\ \alpha_i \cdot b_i(\sigma) & \beta_i \cdot b_i(\sigma) & \gamma_i \cdot b_i(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Соответственно,

$$\Delta_1 = b_2 \cdot a_3 - b_3 \cdot a_2;\ \Delta_2 = b_3 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_3;\ \Delta_3 = b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1,$$

$$\alpha_i = \frac{\Delta_i}{\Xi};\ \Xi = \sum_i \Delta_i;\ \beta_1 = \frac{(b_3 - b_2)}{\Xi};\ \beta_2 = \frac{(b_1 - b_3)}{\Xi};\ \beta_3 = \frac{(b_2 - b_1)}{\Xi}, \tag{6}$$

$$\gamma_1 = \frac{(a_2 - a_3)}{\Xi};\ \gamma_2 = \frac{(a_3 - a_1)}{\Xi};\ \gamma_3 = \frac{(a_1 - a_2)}{\Xi}.$$

Матричные элементы операторов P_i можно рассчитать, используя соотношения (5, 6).

Таким образом, в работе представлена процедура построения проекционных операторов планетарных волн Пуанкаре и Россби для сферической атмосферы. Полученные выражения для дисперсионных соотношений волн и поляризационные соотношения для возмущений гидродинамических параметров являются обобщением широко используемого приближения β-плоскости.

Список литературы

1. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. М., 1984.

2. *Leble S.* Waiveguide Propagation of Nonlinear Waves in Stratified Media. Leningrad, 1988.

3. *Карпов И.В., Бессараб Ф.С., Лебле С.Б.* Операторы проектирования для волн Россби и Пуанкаре //Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. 2007. Вып. 4. С. 76—79.

Об авторах

Анастасия Алексеевна Лебедкина — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: malinrose@mail.ru

Иван Викторович Карпов — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: ivkarpov@inbox.ru

Сергей Борисович Лебле — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: lebleu@mail.ru

About authors

Anastasia Lebedkina — PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: malinrose@mail.ru

Ivan Karpov — Dr, prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: ivkarpov@inbox.ru

Sergey Leble — Dr, prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: lebleu@mail.ru